数理解析研究所講究録
第 1870 巻 2013 年 77-83

TWO-SIDED BGG RESOLUTIONS AND APPLICATIONS

京大数理研 (RIMS)　荒川知幸

1. はじめに

有限次元複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ に付随するアフィンリー環を $\widehat{\mathfrak{g}}$ とする. 我々は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の主許容表現[1][KW89] に興味がある. 主許容表現は可積分表現を含む $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現の族であり, 完全可約性やモジュラー不変性が成立する性質の良い表現である. また, W 代数にとっても重要な表現である ([FKW92, A07, KW08, A10, A11]). しかし, その構造については $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の場合以外についてはほとんど分かっていなかった.

主許容表現の解析が困難な要因としては, 一般に主許容表現に対しては可積分表現とは異なり

- ユニタリー性やワイル群不変性が成立しない,
- (自然な) 幾何学的実現が (現時点では) 存在しない,
- 結晶基底の理論が (現時点では) 存在しない,

などの様々な理由が挙げられる. しかし技術的に最も問題であるのは

- 可積分表現の場合と異なり $\mathfrak{sl}_2$ の場合に帰着できない,

という点であろう.

しかし, 我々は最近, 通常の制限関手の代わりに semi-infinite 制限関手というある種の exotic な関手を用いると, 主許容表現が階数が低いアフィンリー環の主許容表現の直和に分解する (可能性がある[2]) ことに気が付いた. つまり, semi-infinite 制限関手を用いることにより, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の主許容表現の理論を既に知られている $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の主許容表現の理論に帰着させることが可能になると期待される.

しかし, これを実際に実行する為には, semi-infinite 制限関手という exotic な関手の主許容表現に対する性質を調べる必要があるが, これについては現時点では一般論は存在しない. 一方, semi-infinite 制限関手に対する acyclic な自然な対象は脇本加群であるので, 主許容表現の脇本加群による resolution を用いる手法を考えるのが妥当であろう. このような resolution(two-sided BGG resolution) の存在は Frenkel-Kac-脇本 [FKW92] によって予想されていた. 本講演の目的は two-sided

本研究は科研費 (課題番号:20340007, 23654006) の助成を受けたものである.

[1] principal admissible representations

[2] 実際正しい (系 5.4 を参照).

BGG resolution の存在に関する Frenkel-Kac-脇本の予想の肯定的な解決 [A12a] とそのことを用いて示される semi-infinite 制限関手の性質の報告である. 本文中の定理 5.3 を用いて, 我々は以下に挙げるようなさまざまな応用を得ることができたことも付け加えておく.

(i) 主許容表現の singular support に関する Feigin-Frenkel 予想の完全な解決 ([A10][3]).
(ii) 主許容表現に付随する頂点作用素代数の有理性に関する Adamovic-Milas 予想の解決 ([A12b]).
(iii) 主冪零軌道に付随する W 代数の有理性と C_2 有限性に関する Frenkel-Kac-Wakimoto の予想 [FKW92] の解決 ([A12c]).

2. 主許容表現

$(\,|\,)$ を $\mathfrak{g}$ の正規化された内積とすると $\widehat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}K\oplus\mathbb{C}D$ と表される. ただし,

$$[xt^m,yt^n]=[x,y]t^{m+n}+m(x|y)\delta_{m+n,0}K,$$
$$[D,xt^m]=mxt^m,\quad [K,\widehat{\mathfrak{g}}]=0,$$

$(x,y\in\mathfrak{g})$. 三角分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ を固定すると, 対応して $\widehat{\mathfrak{g}}$ の標準的な三角分解 $\widehat{\mathfrak{g}}=\widehat{\mathfrak{n}}_-\oplus\widehat{\mathfrak{h}}\oplus\widehat{\mathfrak{n}}_+$ が定まる. カルタン部分環 $\widehat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}K\oplus\mathbb{C}D$ の双対空間を標準的に $\widehat{\mathfrak{h}}^*=\mathfrak{h}^*\oplus\mathbb{C}\Lambda_0\oplus\mathbb{C}\delta$ と書く. $\widehat{\Delta}$, $\widehat{\Delta}_+$, $\widehat{\Delta}^{re}$, $\widehat{\Delta}^{re}_+$, をそれぞれ $\widehat{\mathfrak{g}}$ のルート, 正ルート, 実ルート, 正の実ルートの集合とする. $\mathcal{W}$ を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群, $Q^\vee$ を $\mathfrak{g}$ のコルート格子とすると

$$\widehat{\mathcal{W}}=\mathcal{W}\ltimes Q^\vee$$

である.

$\mathcal{O}$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の BGG 圏, $M(\lambda)\in\mathcal{O}$ を最高ウエイト λ の Verma 加群, $L(\lambda)\in\mathcal{O}$ を $M(\lambda)$ の唯一の既約商とする. また $\mathcal{O}^{[\lambda]}$ で $L(\lambda)$ を含む $\mathcal{O}$ のブロックを表す.

定義 2.1. $\lambda\in\widehat{\mathfrak{h}}^*$ は次の満たすとき主許容的であると云われる.

(i) λ は regular dominant である. すなわり全ての $\alpha\in\Delta^{re}_+$ に対して $\langle\lambda+\widehat{\rho},\alpha^\vee\rangle\notin\mathbb{Z}_{\geq 0}$.
(ii) ルート系として $\Delta^{re}(\lambda)\cong\Delta^{re}$. ただし $\Delta^{re}(\lambda)=\{\alpha\in\Delta^{re};\langle\lambda+\widehat{\rho},\alpha^\vee\rangle\in\mathbb{Z}\}$.

またこの時 $L(\lambda)$ は主許容表現と云われる.

定義から, 主許容表現 $L(\lambda)$ は Weyl-Kac 型の指標公式を持つ：

$$\operatorname{ch}L(\lambda)=\sum_{w\in\widehat{\mathcal{W}}(\lambda)}\frac{(-1)^{\ell_\lambda(w)}e^{w\circ\lambda}}{\prod_{\alpha\in\widehat{\Delta}_+}(1-e^{-\alpha})^{\dim\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha}}.$$

---

[3] v2 以降.

ここで, $\widehat{\mathcal{W}}(\lambda)$ は λ の整 Weyl 群:

$$\widehat{\mathcal{W}}(\lambda) = \langle s_\alpha; \alpha \in \widehat{\Delta}^{re}(\lambda)\rangle.$$

定義から $\widehat{\mathcal{W}}(\lambda)$ と $\widehat{\mathcal{W}}$ は同型になることに注意する. $\widehat{\mathcal{W}}$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現の整 Weyl 群であるので Fiebig[Fie06] の定理よりから次の事実が従う.

定理 2.2 (Fiebig[Fie06]). λ を主許容ウエイト, λ' を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の支配的整ウエイトとすると圏同値 $\mathcal{O}^{[\lambda]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{[\lambda']}$ であって $M(w\circ\mu)$ を $M(w'\circ\lambda')$ に $L(w\circ\lambda)$ を $L(w'\circ\lambda)$ に送るものが存在する. ここで w' は同型写像 $\widehat{\mathcal{W}}(\lambda) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{W}}$ による w の像.

可積分表現は BGG 型の resolution を持つ [GL76] ので上の定理から次が従う.

系 2.3. 主許容表現は (通常の)BGG 型の resolution を持つ.

3. Semi-infinite (generic) Bruhat ordering

$\widehat{\mathcal{W}}$ の元 w についてその semi-infinite length が次で定義される [FF90].

$$\ell^{\frac{\infty}{2}}(w) = \sharp\{\alpha \in \widehat{\Delta}^{re}_+; w(\alpha) \in -\widehat{\Delta}^{re}, \bar{\alpha} \in \Delta_+\}$$
$$-\sharp\{\alpha \in \widehat{\Delta}^{re}_+; w(\alpha) \in -\widehat{\Delta}^{re}, \bar{\alpha} \in \Delta_-\}.$$

ただし, $\widehat{\mathfrak{h}}^* \in \lambda \mapsto \bar{\lambda} \in \mathfrak{h}^*$ は制限写像を表す.

$w, w' \in \widehat{\mathcal{W}}$ に対して $\widehat{\mathcal{W}}$ の元の列 $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ が存在して

(i) $w_0 = w_1$, $w_n = w'$

(ii) 全ての i について鏡映 s_{β_i}, $\beta_i \in \widehat{\Delta}^{re}$ が存在して $w_i = w_{i+1}s_{\beta_i}$, $\ell^{\frac{\infty}{2}}(w_i) < \ell^{\frac{\infty}{2}}(w_{i+1})$

を満たすとき, $w \preceq_{\frac{\infty}{2}} w'$ と書く. すると,

(1) $\quad w \preceq_{\frac{\infty}{2}} w' \iff$ 十分大きな $\lambda \in Q^\vee$ に対して $t_{-\lambda}w' \preceq t_{-\lambda}w$

が成立する. ただし, $\lambda \in Q^\vee$ が十分大きいとは $\mathfrak{g}$ の各単純ルート α_i について $\alpha_i(\lambda)$ が十分大きいことを意味し, また $\preceq$ は [BGG75] の意味での Bruhar ordering を表す. (1) から $\preceq_{\frac{\infty}{2}}$ が半順序を定めること, また Lusztig[Lus80] の所謂 generic Bruhat ordering と一致することがわかる ([Soe97] を参照のこと).

S を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の単純ルートの部分集合とすると, 対応して $\mathcal{W}$ のパラボリック部分群 $\mathcal{W}_S$ が定まる. $Q_S^\vee$ を対応する $Q^\vee$ の部分格子とすると

$$\widehat{\mathcal{W}}_S := \mathcal{W}_S \ltimes Q_S^\vee \subset \widehat{\mathcal{W}}$$

は $\mathcal{W}_S$ のアフィン Weyl 群である. ($\widehat{\mathcal{W}_S}$ は $\widehat{\mathcal{W}}$ のパラボリック部分群ではないことに注意する.) 定義から, $\widehat{\mathcal{W}}$ の semi-infnite length の $\widehat{\mathcal{W}_S}$ への制限は $\widehat{\mathcal{W}_S}$ の semi-infinite length に一致することがわかる.

$\Delta^{re}_{S,+} \subset \Delta^{re}_+$ を $\widehat{\mathcal{W}_S}$ に対応する実ルートの集合とし.

$$\widehat{\mathcal{W}}^S := \{w \in \widehat{\mathcal{W}}; w^{-1}(\widehat{\Delta}^{re}_{S,+}) \subset \widehat{\Delta}^{re}_+\}$$

と定める. すると次が成立する.

定理 3.1 ([A12a]). 積写像 $\widehat{\mathcal{W}_S} \times \widehat{\mathcal{W}}^S \to \widehat{\mathcal{W}}$ は全単射. また $w \in \widehat{\mathcal{W}_S}$, $w' \in \widehat{\mathcal{W}}^S$ に対して

$$\ell^{\frac{\infty}{2}}(ww') = \ell^{\frac{\infty}{2}}(w) + \ell^{\frac{\infty}{2}}(w').$$

4. Two-sided BGG resolutions

$\mathbf{W}(\lambda)$ を最高ウエイト λ の脇本加群とする. $\operatorname{ch}\mathbf{W}(\lambda) = \operatorname{ch}M(\lambda)$ である.

次の事実は Feigin-Frenkel[FF90] において証明なしで述べられた.

定理 4.1 ([A12a]). $M \in \mathcal{O}$ について次は同値.

(i) $M \cong \mathbf{W}(\lambda)$,

(ii) $\widehat{\mathfrak{h}}$ 加群として

$$H^{\frac{\infty}{2}+i}(\mathfrak{a}, M) \cong \begin{cases} \mathbb{C}_\lambda & (i=0), \\ 0 & (i \neq 0). \end{cases}$$

ここで, $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}[t^{-1}]t^{-1} \oplus \mathfrak{n}[t,t^{-1}] \subset \widehat{\mathfrak{g}}$.

λ を主許容ウエイトとし, $\widehat{\mathcal{W}}(\lambda) \cong \widehat{\mathcal{W}}$ の semi-infinite length を $\ell^{\frac{\infty}{2}}_\lambda$ と書く. また

$$\widehat{\mathcal{W}}^i(\lambda) = \{w \in \widehat{\mathcal{W}}; \ell^{\frac{\infty}{2}}_\lambda(w) = i\}$$

とおく.

注意 4.2.

$$\sharp\widehat{\mathcal{W}}^i(\lambda) = \begin{cases} 1 & \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \text{ のとき}, \\ \infty & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

となることがわかる.

定理 4.3. λ を主許容ウエイト, $w \in \widehat{\mathcal{W}}^i(\lambda)$, $w' \in \widehat{\mathcal{W}}^{i+1}(\lambda)$, $w \preceq_{\frac{\infty}{2}} w'$ とすると

$$\operatorname{Hom}_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\mathbf{W}(w \circ \lambda), \mathbf{W}(w' \circ \lambda)) \cong \mathbb{C}.$$

定理 4.4 ([A12a], two-sided BGG resolution). $L(\lambda)$ を $\mathfrak{g}$ 可積分な主許容表現とする. このとき, $\hat{\mathfrak{g}}$ 加群の複体

$$\dots \to C^{-2}(\lambda) \xrightarrow{d_{-2}} C^{-1}(\lambda) \xrightarrow{d_{-1}} C^{0}(\lambda) \xrightarrow{d_0} C^{1}(\lambda) \xrightarrow{d_1} \dots$$

であって次を満たすものが存在する.

(i) $C^i(\lambda) = \bigoplus_{w \in \widehat{W}^i(\lambda)} \mathbf{W}(w \circ \lambda)$.

(ii) $d_i = \sum_{\substack{w \in \widehat{W}^i(\lambda), w' \in \widehat{W}^{i+1}(\lambda) \\ w \preceq_{\frac{\infty}{2}} w'}} d_{w,w'}$. ただし, $d_{w,w'}$ は $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathfrak{g}}}(\mathbf{W}(w \circ \lambda), \mathbf{W}(w' \circ \lambda))$ の零でない元.

(iii) $H^i(C^\bullet(\lambda)) \cong \begin{cases} L(\lambda) & (i = 0), \\ 0 & (i \neq 0). \end{cases}$

注意 4.5.

(i) $\mathfrak{g}$ 可積分でない主許容表現に対しては捻れた脇本表現による同様の resolution の存在を示すことができる[4].

(ii) [FKW92] はを量子 Drinfeild-Sokolov 還元法に付随する BRST コホモロジーの消滅予想を証明する一つのアプローチとして定理 4.4 の形の resolution を用いることを提案した. コホモロジーの消滅自体は [A07] において一般的に証明されているが, 逆にコホモロジーの消滅から量子 Drinfeild-Sokolov 還元関手を定理 4.4 の形の resolution に適応することにより, W 代数の極小系列表現 [A07, A12c] の自由場表示による resolution を得ることができる.

5. Semi-infinite 制限関手

$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の極小[5]パラボリック部分群,

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$$

を $\mathfrak{p}$ の Levi 部分環 $\mathfrak{l}$ と nilradical$\mathfrak{m}$ との和への分解とする. このとき,

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}_2^{(i)} \oplus \mathfrak{l}_0$$

である. ただし, $\mathfrak{sl}_2^{(i)}$ は $\mathfrak{g}$ のある単純ルート α_i に対応する $\mathfrak{sl}_2$ のコピー, $\mathfrak{l}_0$ は $\mathfrak{l}$ の中心. そこで

$$\hat{\mathfrak{l}} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2^{(i)} \oplus \hat{\mathfrak{l}}_0$$

と定める. ただし, $\hat{\mathfrak{l}}_0$ は $\mathfrak{l}$ に対応する Heisenberg 代数.

[4][FKW92] は (捻れていない) 脇本表現による resolution の存在を一般の主許容表現に対して予想しているが....

[5]以下に述べる結果の為には極小である必要はないが簡単のため.

$\widehat{\mathfrak{l}}$の表現Mが$\widehat{\mathfrak{sl}}_2^{(i)}$の表現としてレベル$k'$, $\widehat{\mathfrak{l}}_0$の表現としてレベルk''のときレベル(k',k'')であるということにする．また$h^\vee$を$\mathfrak{g}$の双対Coxeter数とし, $k\in\mathbb{C}$に対し

$$k_1+2=\frac{2}{(\alpha_1|\alpha_1)}(k+h^\vee)$$

で$k_1\in\mathbb{C}$を定める．

Lemma 5.1. $M\in\mathcal{O}$がレベルkのとき, $H^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{m}[t,t^{-1}],M)$に自然にレベル$(k_1,k+h^\vee)$の$\widehat{\mathfrak{l}}$の表現の構造が入る．

$\mathcal{O}^{\widehat{\mathfrak{l}}}$を$\widehat{\mathfrak{l}}$のBGG圏とする．このとき補題5.1より, 関手

$$\text{S-res}^{\widehat{\mathfrak{g}}}_{\widehat{\mathfrak{l}}}:\mathcal{O}\to\mathcal{O}^{\widehat{\mathfrak{l}}},\quad M\mapsto H^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathfrak{m}[t,t^{-1}],M)$$

が定まる．

レベルkの$\widehat{\mathfrak{g}}$のウエイトλに対して$\widehat{\mathfrak{l}}$のウェイト$\lambda_{\widehat{\mathfrak{l}}}$を$\lambda_{\widehat{\mathfrak{l}}}(h)=\lambda(h)$ $(h\in\mathfrak{h})$, $\lambda_{\widehat{\mathfrak{l}}}(K_1)=\frac{2}{(\alpha_1|\alpha_1)}(k+h^\vee)-2$, $\lambda_{\widehat{\mathfrak{l}}}(K_2)=k+h^\vee$で定める．ただし, K_1, K_2はそれぞれ$\widehat{\mathfrak{sl}}_2^{(i)}$, $\widehat{\mathfrak{l}}_0$の中心．

以下, $S=\{\alpha_i\}$とする．

Lemma 5.2. $L(\lambda)$が$\mathfrak{g}$可積分な主許容表現なとき, $w\in\widehat{W}^S$について$(w\circ\lambda)_{\widehat{\mathfrak{l}}}$は$\widehat{\mathfrak{l}}$の主許容ウエイト[6]である．

定理 5.3. $L(\lambda)$を$\mathfrak{g}$可積分な主許容表現とする．このとき,

$$\text{S-res}^{\widehat{\mathfrak{g}}}_{\widehat{\mathfrak{l}}}C^\bullet(\lambda)=\bigoplus_{w\in\widehat{W}^S}C^\bullet_{\widehat{\mathfrak{l}}}((w\circ\lambda)_{\widehat{\mathfrak{l}}})[\ell^{\frac{\infty}{2}}(w)].$$

ここで, $C^\bullet_{\widehat{\mathfrak{l}}}(\mu)$は$\widehat{\mathfrak{l}}$の最高ウエイト$\mu$の主許容表現$L_{\widehat{\mathfrak{l}}}(\mu)$の両側BGG resolutionで$[n]$は次数のshiftを表す．

系 5.4. $L(\lambda)$を$\mathfrak{g}$可積分な主許容表現とすると

$$H^{\frac{\infty}{2}+i}(L(\lambda))\cong\bigoplus_{w\in\widehat{W}^S}L_{\widehat{\mathfrak{l}}}((w\circ\lambda)_{\widehat{\mathfrak{l}}})\quad(\forall i\in\mathbb{Z}).$$

注意 5.5. 系5.4はKostantの結果[Kos61]の拡張と見なすことができる．Kostantの証明は$L(\lambda)$のユニタリー性とWeyl群不変性を用いるものであり, 同じ議論を用いて細野-土屋[HT91]は$L(\lambda)$が可積分の時に系5.4を証明している[7]．

---

[6] $\widehat{\mathfrak{sl}}_2^{(i)}$のウエイトと見たとき主許容ウエイト．

[7] 勿論, $L(\lambda)$が一般の主許容表現のときには$L(\lambda)$のユニタリー性やWeyl群不変性は成立しないのでKostantの議論は適用することができない．

References

[A07] T. Arakawa. Representation theory of W-algebras. *Invent. Math.*, 169(2):219–320, 2007.

[A10] T. Arakawa. Associated varieties of modules over Kac-Moody algebras and C_2-cofiniteness of W-algebras. 04 2010. 1004.1554v2.

[A11] T. Arakawa. Representation theory of W-algebras, II. In *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, volume 61 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 51–90. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2011.

[A12a] T. Arakawa. Two-sided BGG resolutions of admissible representations. *preprint*, 2012. arXiv:1207.4276[math.QA].

[A12b] T. Arakawa. Rationaloty of admissible affine vertex algebras in the category $\mathcal{O}$. *preprint*, 2012. arXiv:1207.4857[math.QA].

[A12c] Tomoyuki Arakawa. Rationality of W-algebras; principal nilpotent cases. *preprint*, 2012. arXiv:1211.7124[math.QA].

[BGG75] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel′fand, and S. I. Gel′fand. Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules. In *Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971)*, pages 21–64. Halsted, New York, 1975.

[FF90] Boris L. Feĭgin and Edward V. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 128(1):161–189, 1990.

[Fie06] Peter Fiebig. The combinatorics of category $\mathcal{O}$ over symmetrizable Kac-Moody algebras. *Transform. Groups*, 11(1):29–49, 2006.

[FKW92] Edward Frenkel, Victor Kac, and Minoru Wakimoto. Characters and fusion rules for W-algebras via quantized Drinfel′d-Sokolov reduction. *Comm. Math. Phys.*, 147(2):295–328, 1992.

[GL76] Howard Garland and James Lepowsky. Lie algebra homology and the Macdonald-Kac formulas. *Invent. Math.*, 34(1):37–76, 1976.

[HT91] Shinobu Hosono and Akihiro Tsuchiya. Lie algebra cohomology and $N = 2$ SCFT based on the GKO construction. *Comm. Math. Phys.*, 136(3):451–486, 1991.

[Kos61] Bertram Kostant. Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem. *Ann. of Math. (2)*, 74:329–387, 1961.

[KW89] V. G. Kac and M. Wakimoto. Classification of modular invariant representations of affine algebras. In *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, volume 7 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 138–177. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

[KW08] Victor G. Kac and Minoru Wakimoto. On rationality of W-algebras. *Transform. Groups*, 13(3-4):671–713, 2008.

[Lus80] George Lusztig. Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns. *Adv. in Math.*, 37(2):121–164, 1980.

[Soe97] Wolfgang Soergel. Kazhdan-Lusztig polynomials and a combinatoric[s] for tilting modules. *Represent. Theory*, 1:83–114 (electronic), 1997.